Tenzory křivosti a křivost ve třech dimenzích

NTMF059 – Zápočtový problém 2020

Weylův, Schoutenův a Cottonův tenzor

Weylův tenzor je v obecné dimenzi d definován

$$\boldsymbol{C}_{ab\,cd} = \boldsymbol{R}_{ab\,cd} - \frac{4}{d-2}\,\mathbf{Ric}_{[a|[c}\,\boldsymbol{g}_{d]|b]} + \frac{2}{(d-1)(d-2)}\,\mathcal{R}\,\boldsymbol{g}_{[a|[c}\,\boldsymbol{g}_{d]|b]}\ .$$

Jedná se o bezestopou část Riemannova tenzoru se stejnými symetriemi vůči záměně indexů. Schoutenův tensor $\mathbf{Sch}_{ab}$ je definován

$$\mathbf{Sch}_{ab} = \frac{1}{d-2}\Big(\mathbf{Ric}_{ab} - \frac{1}{2(d-1)}\mathcal{R}\,\boldsymbol{g}_{ab}\Big)$$

a pomocí něj definujeme Cottonův tensor $\mathbf{Cot}_{a\,kl}$

$$\mathbf{Cot}_{a\,kl} = \boldsymbol{\nabla}_k\,\mathbf{Sch}_{la} - \boldsymbol{\nabla}_l\,\mathbf{Sch}_{ka}\ .$$

(i) Dokažte, že platí

$$\mathbf{Cot}_{a\,kl} = \mathbf{Cot}_{a\,[kl]}\ ,\quad \mathbf{Cot}_{[abc]} = 0\ ,\quad \mathbf{Cot}^{n}{}_{nl} = 0\ ,$$

(ii) a že divergence Weylova tenzoru je

$$\boldsymbol{\nabla}_k\,\boldsymbol{C}^{k}{}_{a\,bc} = (d-3)\,\mathbf{Cot}_{a\,bc}\ .$$

Křivost ve třech dimenzích

Zkoumejme metriku $\boldsymbol{g}_{ab}$ ve třech dimenzích se signaturou $(+\,+\,+)$ nebo $(-\,+\,+)$, pro kterou zavedeme znaménko $\pm \equiv \operatorname{sign}\boldsymbol{g}$.

Pro Levi-Civitův tensor $\boldsymbol{\varepsilon}_{abc}$ tak máme

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{abc}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{klm} = \pm 6\,\delta^{k}_{[a}\delta^{l}_{b}\delta^{m}_{c]}\ .$$

Hodgeův duál transformuje 2-formy na 1-formy a naopak

$$(*\boldsymbol{\omega})_a = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}_a{}^{kl}\,\boldsymbol{\omega}_{kl}\ ,\quad (*(*\boldsymbol{\omega}))_{ab} = \boldsymbol{\varepsilon}_{ab}{}^{k}\,(*\boldsymbol{\omega})_k = \pm\omega_{ab}\ .$$

(iii) Ukažte

$$\pm\boldsymbol{\varepsilon}_{abm}\,\boldsymbol{\varepsilon}_{cdn}\,\boldsymbol{g}^{mn} = 2\,\boldsymbol{g}_{[a|[c}\,\boldsymbol{g}_{d]|b]}\ .$$

Pro tenzor $\boldsymbol{A}_{ab\,cd}$ antisymetrický v prvním i druhém páru indexů můžeme zavést levý a pravý Hodgův duál

$$^*\!\boldsymbol{A}_{k\,cd} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}_k{}^{ab}\,\boldsymbol{A}_{ab\,cd}\ ,\quad \boldsymbol{A}^*_{ab\,l} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}_l{}^{cd}\,\boldsymbol{A}_{ab\,cd}\ ,\quad ^*\!\boldsymbol{A}^*{}_{kl} = \frac{1}{4}\boldsymbol{\varepsilon}_k{}^{ab}\,\boldsymbol{\varepsilon}_l{}^{cd}\,\boldsymbol{A}_{ab\,cd}\ .$$

(iv) Ukažte, že pro duály Riemannova tensoru $\boldsymbol{R}_{ab\,cd}$ platí

$$^*\!\boldsymbol{R}^k{}_{ka} = 0\ ,\quad \boldsymbol{R}^*{}_{ak}{}^k = 0\ ,\quad \mathbf{Ein}_{ab} = \mp{}^*\!\boldsymbol{R}^*{}_{ab}\ ,\quad \mathcal{R} = \pm 2\,\boldsymbol{g}^{ab}\,{}^*\!\boldsymbol{R}^*{}_{ab}\ .$$

(v) S využitím těchto výsledků dokažte, že ve třech dimenzích Weylův tenzor vymizí

$$\boldsymbol{C}_{ab\,cd} = 0\ .$$

Poznámka k Schoutenovu tenzoru:

S užitím notace dvojtého wedge zavedeného na doplňkové přednášce lze zapsat Riemannův tenzoru následovně:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R} &= \boldsymbol{C} - \frac{1}{d-2}\,\boldsymbol{S} \owedge \boldsymbol{g} - \frac{1}{2d(d-1)}\mathcal{R}\,\boldsymbol{g} \owedge \boldsymbol{g}\\ &= \boldsymbol{C} - \frac{1}{d-2}\,\mathbf{Ric} \owedge \boldsymbol{g} + \frac{1}{2(d-1)(d-2)}\mathcal{R}\,\boldsymbol{g} \owedge \boldsymbol{g}\\ &= \boldsymbol{C} + \mathbf{Sch} \owedge \boldsymbol{g}\ ,\end{aligned}$$

kde $\boldsymbol{S} = \mathbf{Ric} - \frac{1}{d}\mathcal{R}\boldsymbol{g}$ je bezestopá část Ricciho tenzoru.

Poznámka k Weylovu a Cottonovu tenzoru:

O metrice $\boldsymbol{g}$ řekneme, že je konformně plochá, pokud lze zapsat

$$\boldsymbol{g} = \Omega^2 \boldsymbol{g}_0\ ,$$

kde $\boldsymbol{g}_0$ je plochá metrika, tj. metrika s nulovým Riemannovým tenzorem.

V dimenzi $d > 4$ se ukazuje, že metrika je konformně plochá pokud je její Weylův tenzor nulový.

V dimenzi $d = 3$ tuto roli přebírá Cottonův tenzor: metrika je konformně plochá, pokud $\mathbf{Cot} = 0$.

V dimenzi $d = 2$ je každá metrika konformně plochá.

Konečně, pro $d = 1$ je každá metrika plochá, jelikož Riemannův tenzor je triviálně nulový.